

ПСИХОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТВОРЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ

У статті аналізуються результати дослідження пошукових дій при розв'язуванні творчих математичних задач, що мають вимогу довести. Акцентується увага на деяких виявлених особливостях процесів розуміння задачі, формування задуму розв'язку, апробації мислительних результатів, пов'язаних із такою вимогою.

Ключові слова: творчі математичні задачі, творчий математичний процес, проблемна ситуація, зміст задачі, структурні одиниці задачі, розчленування даних задач, геометричні побудови, конкретизація структурних одиниць, алгоритм, потік прогнозів, числові співвідношення, пошукова діяльність суб'єкта.

Творчий математичний процес викликає зацікавленість різних науковців. Не є винятком і психологи, які ставлять собі за мету з'ясувати сутність математичного мислительного процесу, особливо спрямованого на розв'язування творчих задач, тобто таких, для яких у математиці не існує готових алгоритмів розв'язування, або які не відомі тому, хто розв'язує.

Ця тема дослідження не нова і містить чималі наробки. Дослідженням творчого математичного процесу свого часу займалися Р. Декарт, Г. Лейбніц, В. Вундт, Ж. Адамар, А. Пуанкаре, Д.Д.Мордухай-Болтовський, Д.Пойя та інші, однак цілісної характеристики творчого математичного процесу не створено. Такі дослідження спрямовувались на з'ясування взаємозв'язку усвідомлених і неусвідомлених актів пошукового процесу

математика [1, 17], [4, 24], [11, 317], [14, 221], послідовності станів ученого-математика, суборганізації дій пізнаючого суб'єкта [12], організацію математичного знання у свідомості математика [3], формалізацію законів думки [2].

На наш погляд, цікавою є проблема з'ясування психологічної сутності процесу розв'язування математичних задач із різними вимогами: знайти невідому величину, довести, побудувати, дослідити. Ми провели експериментальне дослідження процесу розв'язування подібних творчих математичних задач. У ньому взяли участь 284 студенти Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, що здобували інженерні спеціальності. Кожен студент розв'язав по 20 задач із різних завдань, що певною мірою містили модифікації вказаних вимог. У цій статті дається аналіз пошукового процесу, спрямованого на розв'язання задач із вимогою "довести".

У психології "творча задача" переважно ототожнюється з проблемною ситуацією [7, 10, 13] і зумовлюється характером перебігу її розв'язування [5, 10]. Серед ознак творчої задачі можна виділити, по-перше, її новизну для конкретного суб'єкта [5, 7, 10, 12]; по-друге, зміну домінуючих рівнів у процесі розв'язування аж до переходу неусвідомлених рівнів у ранг домінуючих [13]; по-третє, факт "блокування" процесу розв'язування після тривалого нерезультативного пошуку [1]; по-четверте, можливість розв'язувати кількома способами [5, 10]. Таким чином, одна і та сама задача може бути творчою для однієї людини і нетворчою для іншої.

Ми дотримуємось того, що творчий математичний процес є тристадійним: вивчення умови, формування задуму розв'язку, перевірка знайденого розв'язку, який опирається на три процеси: розуміння задачі, прогнозування і апробацію математичних результатів. При розв'язуванні творчих задач ці процеси проходять паралельно, доповнюючи один одного. Спираючись на результати розуміння і прогнозування, третій процес продукує свої мислительні надбання, що, в свою чергу, підживлюють два попередні.

У задачах на доведення вимога полягає в тому, щоб переконатися у справедливості певного твердження або перевірити його достовірність чи хибність. Взагалі, довести будь-яке твердження – означає показати, що воно є логічним наслідком системи вже доведених і прийнятих у математиці тверджень. При вивченні процесів доведення математичних фактів варто враховувати, що математика оперує формалізованими об'єктами реальності за допомогою символів і на основі законів формальної логіки, послуговуючись при цьому неусвідомленими мислительними актами [8].

Розпочинаючи знайомство із задачею, студенти намагаються найперше зрозуміти її зміст. Тому з'ясовуються значення структурних одиниць, які містить умова. Часто цього вдається досягти за допомогою впізнавання. Зокрема, зміст вимоги “довести” зрозумілий студенту. Однак той, хто розв'язує, не завжди адекватно розуміє завдання “довести”. Як показало дослідження, не всі студенти розуміють сутність такої вимоги. Деякі підмінювали завдання “довести” завданням “перевірити”. Звісно, що таке “розуміння” основної вимоги не приводить до правильного розв'язку.

У подальшому умова задачі розбивається на декілька частин. Задача, що містить вимогу довести, розчленовується на те, що дано, і те, що необхідно довести. Умовою задачі в основному окреслюється як перше, так і друге, тому перефразована суб'єктом задача “по-своєму” набуває такого схематичного вигляду: відомий набір математичних об'єктів A з більш-менш установленими властивостями, необхідно довести математичний факт B з більш-менш установленими властивостями. Основна проблема при цьому у з'ясуванні логічного ланцюга математичних тверджень, які ведуть від A до B .

Поглиблення розуміння умови задачі супроводжується появою геометричних побудов – ілюстрацій. Якщо ж ілюстрація супроводжує подання умови задачі, то відбувається зіставлення тексту із зображенням і навпаки, або паралельна побудова “своєї” ілюстрації. Ми зафіксували, що в разі можливої “матеріалізації” шуканих об'єктів у вигляді конкретних фігур, графіків, схем,

блоків при розв'язуванні задач на доведення, студенти намагаються виконати їх.

У процесі розуміння задач на доведення спочатку окреслюються вихідні і кінцеві точки пошуку. У подальшому суб'єкт намагається виявити ознаки і властивості "кінцевої" інформації у "вихідній", або, іншими словами, в тому, що дано, шукаються корисні із суб'єктивної точки зору ознаки того, що необхідно довести. З іншого боку, з'ясовується зміст того, що необхідно довести, через призму ознак об'єктів, які дані в умові. Тобто після детального вивчення умови задачі (визначення основного завдання задачі, встановлення зв'язків між структурними елементами і тими їх властивостями, що були відомі суб'єкту), відбувається конкретизація і відбір таких структурних одиниць та пов'язаних з ними теоретичних фактів, які, на думку суб'єкта, сприятимуть успішному розв'язуванню, тобто є суб'єктивно привабливими. Так виникають орієнтири пошукового процесу. Для задач на доведення вони частіше всього за змістом є різними теоретичними фактами, що пов'язані із описаною в задачі математичною ситуацією.

У результаті описаних дій настає впевненість, що цю задачу можна розв'язати або використавши певний прийом, що вже зустрічався (інтерполяція), або звівши її до вже відомої математичної ситуації, різновидом якої є дана задача (екстраполяція), або застосувавши здогад, що виник в процесі дослідження умови. Тобто настає впевненість суб'єкта у розумінні задачі, і мислительні дії спрямовуються на відшукування розв'язку.

Зазначимо, що для розв'язування задач на доведення не існує алгоритму, за винятком тих випадків, коли йдеться про доведення рівності математичних об'єктів, наприклад $A=B$. У цих випадках можна сказати, що є три шляхи: або обчислити чи перетворити A до виду B , або обчислити чи перетворити B до виду A , або A і B обчислити чи перетворити до одного і того ж виду C . У випадках, коли необхідно довести, що з A випливає B , загальних принципів доведення не існує.

Як відомо, процес розв'язування нової задачі опирається на висування і перевірку різного роду гіпотез. У задачах на доведення

частіше, ніж у задачах з іншими вимогами, перші гіпотези висловлювалися навмання, відштовхуючись від випадково взятого елемента, з того, що дано або необхідно довести, і стосувались логічних зв'язків між структурними елементами задач. Велика питома вага серед перших гіпотез – “гіпотез навмання” – аж ніяк не означає марнування часу і непродуктивної витрати інтелектуальних зусиль. Такі гіпотези сприяли глибшому розумінню задач, повнішого з'ясування значущості складових елементів задачі, більш вичерпного вивчення їх “можливостей”. Тобто у процесі розв'язування задач на доведення розуміння-прогнозування спочатку є більш значущим для пошукового процесу, а гіпотези про розв'язок (про побудову ланцюга взаємозв'язку між структурними елементами) виникають дещо пізніше.

Переважно прогнозування в таких задачах має два напрями: від того, що дано, до того, що необхідно довести, і навпаки. Такий хід міркувань сприяє глибшому розумінню обох “полюсів”. А саме: розумінню того, як можна використати те, що дано, і те, що потрібно для доведення даного твердження, тобто мова йде про розуміння необхідних і достатніх умов доведення.

Потік прогнозів, гіпотез сприяє виникненню гіпотези про шлях розв'язування. Йдеться про домінуючу гіпотезу, бо при її виборі існує ще ряд інших, часто досить віддалених від ситуації задачі або дуже конкретизованих, що є істинними лише для певної частини задачі при певних значеннях символів та їх взаємодії. Надалі пошуковий процес буде скеровуватися цією гіпотезою (провідною ідеєю).

Провідна ідея, що виникла, ще не є чіткою і конкретною. Вона потребує розвитку, деталізації, але це вже ідея, яка визначає стратегію пошуку і може породити задум майбутнього розв'язку. Така ідея спричинює подальшу видозміну структурних елементів, властивості яких сприяють розвитку ідеї, реалізації задуманого.

У випадку розв'язування задач на доведення змістом провідної ідеї є принцип побудови логічного зв'язку між актуалізованими теоретичними фактами, в канву якого влітаються структурні елементи, що дані в умові задачі. У більшості випадків провідна

ідея не охоплює конкретних числових даних. Вона висувається на основі суб'єктивного усвідомлення того, які параметри відомі, а які ні. Це не стосується тих випадків, коли в умові задачі на доведення висувається вимога довести певний математичний факт, що справедливий лише із певними кількісними оцінками. У таких випадках конкретна кількісна величина, набуваючи певної якісної значущості, стає орієнтиром при висуванні гіпотез щодо розв'язування, і провідна ідея відштовхується від неї, базується на ній. Зорові образи, що при цьому виникають, за змістом є ілюстраціями ситуації задачі або можливої її трансформації (наприклад, побудови не визначеного задачею геометричного елемента).

За своєю сутністю наповнення змістом провідної ідеї полягає в підключенні початкових числових співвідношень, активізації асоціювання, внаслідок чого виникають нові структурні одиниці, що є логічним новоутворенням із елементів задачі, введення різних змінних.

Слід звернути увагу на те, що структурні новоутворення – це власний винахід суб'єкта, це те, що часто допомагає йому розв'язати задачу за допомогою відомого прийому – перевести задачу із нової, невідомої, творчої у відому, стандартну. Наприклад, при доведенні тотожностей за допомогою розчленування або групування різних виразів вдається виділити групу елементів, після ототожнення яких із однією змінною дана тотожність спрощується. Зміст і складність новоутворень пов'язані із змістом і складністю задачі. В одних випадках ідеться про приєднання, складання, заміщення простих математичних об'єктів, в інших – про складну, часто не усвідомлену процедуру на аналогічних принципах.

Маючи в основному позитивне значення, все ж такі новоутворення інколи ставали на перешкоді пошукового процесу. Такі новоутворення – це наслідок пошукової діяльності суб'єкта, продукт його математичної творчості. Він їх “породив”, і часто йому стає важко з ними розпрощатися. Ми часто спостерігали, що навіть коли вичерпується можливість новоутворення сприяти позитивному результату, студенти ще і ще раз у різних ракурсах

підключають їх до логічного ланцюга, і це деколи гальмує пошуковий процес.

Отже, в результаті вивчення умови (у процесі розуміння) виникає ряд образів, асоціацій, прогнозів. У процесі формування методу доведення вони набувають ролі *орієнтирів* і відбираються за теоретичними ознаками [9]. Орієнтири сприяють виникненню різних гіпотез. Ці гіпотези спочатку мають досить розсіяний характер і стосовно задачі часто бувають прямопротилежними між собою. Під дією основного завдання, основного питання задачі відбувається певна мислительна апроксимація таких мислительних продуктів: досить віддалені – відкидаються, близькі між собою – “розвертаються”, утворюючи єдиний напрям, аж до виникнення основного напрямку (або кількох напрямів), що і визначає *провідну ідею* цього етапу розв’язування (або кілька ідей). Подальша пошукова діяльність підпорядковується провідній ідеї. Процеси асоціювання, прогнозування супроводжують пошукову діяльність, але в межах провідної ідеї. Вони сприяють *наповненню її змістом*. Тому через певний час на основі мислительних операцій провідна ідея наповнюється деталями, різними функціональними взаємозв’язками – будується логічний ланцюг міркувань. На цьому ж етапі, як правило, із кількох ідей відбирається одна [9].

При розв’язуванні задач на доведення побудова логічного ланцюга – особливо важлива ланка формування задуму, його апогей. Адже зміст будь-якого доведення полягає саме у послідовності логічних кроків. Спроба використати певний елемент чи теоретичне твердження без обґрунтування необхідних логічних кроків не стане задумом.

Що ж до кількісних співвідношень, то саме на цьому етапі розпочинається “розшифровування” конкретних кількісних оцінок, вносяться зміни в якісну оцінку вже створених ланок логічного ланцюга.

Отримавши розв’язок (кінцевий чи проміжний), студенти перевіряють його умовою задачі. Це також результативний процес з точки зору і розуміння, і формування задуму творчої математичної задачі. На цьому етапі можна оцінити і розуміння задачі як цілісної системи, і розуміння змісту розв’язку. Розв’язок

не повинен заперечувати числових і символічних співвідношень, задовільняти відомі математичні факти, що стосуються задачі. Розуміння цього завершує розуміння розв'язку.

Часто при розв'язуванні математичних задач студенти виконують такі операції, які розширюють множину розв'язків. За допомогою перевірки це можна з'ясувати і відкинути зайві значення невідомого. Багато математичних об'єктів, як-от функції, алгебраїчні вирази, мають сенс за певних умов. Перевірка сприяє визначенню цих умов. Отримавши розв'язок і з'ясувавши, що він порушує логіку завдання, суб'єкт виявляє для себе те, що певні значення неприпустимі для шуканого розв'язку. Іноколи це можна з'ясувати, якщо глибше зрозуміти умову завдання (наприклад, встановити сферу визначення для шуканої величини). Коли ж цього не сталося, то на етапі перевірки така прогалина в розумінні математичного завдання ліквідується.

Якщо віднайдено логічний ланцюг між тим, що дано, і тим, що необхідно довести, умова задачі стає цілісною системою, всі структурні елементи якої тісно пов'язані логічними зв'язками, при цьому жоден елемент "не випадє", не є випадковим, непотрібним. На передній план виходять ті властивості складових, які задіяні у процесі доведення. Тобто розуміння в цьому випадку набуває форми розуміння-об'єднання і стає дедалі повнішим і глибшим.

Сформований задум творчої математичної задачі на доведення являє собою ланцюг послідовних логічних кроків. Тому його апробація зводиться до перевірки логічного ланцюга міркувань, з допомогою якого доводиться необхідний факт. Тобто перевіряється правильність посилань на відомі факти і правильність логічних наслідків; досліджується, наскільки загальний характер вони мають (чи не опущено часткового випадку, що веде до інших наслідків).

Таким чином, перевірка задуму у задачах на доведення – це ревізування, уважний аналіз отриманих логічних наслідків сформованого логічного ланцюга міркувань, що і є задумом таких задач. Він передбачає "зупинки" на деяких ланках для їх детальнішого вивчення. Такі зупинки спричинюються суб'єктивною невпевненістю в тій чи іншій ланці доведення, яка

долається за допомогою підключення додаткових теоретичних відомостей, раніше набутих навичок, знань, умінь.

Отже, у процесі розв'язування творчих математичних задач на доведення відображаються загальні ознаки мислительної діяльності в галузі математики. Поряд із цим можна виділити ряд особливостей у пошукових діях, що пов'язані з вимогою довести невідомий математичний факт. Такі особливості розпочинаються із розуміння самої вимоги довести конкретний математичний факт і є характерними для всіх етапів пошуку. Зокрема, процес розуміння проходить як процес почергового з'ясування сутності того, що дано в умові задачі, і того, що необхідно довести; у процесі формування задуму орієнтирами в пошукових діях стають, у першу чергу теоретичні факти, пов'язані із задачною ситуацією. Менш значущими для пошукового процесу є конкретні кількісні оцінки. Просторові зорові образи слугують переважно ілюстрацією задачної ситуації; основний зміст процесу апробації сформованого задуму полягає в ревізуванні логічного ланцюга міркувань. При цьому процес формування задуму у задачах на доведення вимагає найбільше інтелектуальних зусиль і є найяскравішим упродовж усього пошукового процесу (на кожному його етапі).

1. Аламар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Сов. радио, 1970. – 152 с.

2. Биркгофф Г. Математика и психология. – М.: Сов. радио, 1977. – 96 с.

3. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 32 с.

4. Вертгеймер М. Продуктивное мышление. – М.: Прогресс, 1987. – 336 с.

5. Коваленко А.Б. Психология розуміння. – К.: Геропринт, 1999. – 184 с.

6. Математические термины: словарь. – К.: Вища школа, 1988. – 295 с.

7. Матюшкин А.М. Интуиция и творчество // Мир психологии. – 1996. – № 4. – С. 28 – 36.

8. Мойсєєнко Л.А. Математичне мислення як предмет психологічних досліджень // Збірник наукових праць: філософія, соціологія, психологія. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарпатського ун-ту, 2002. – Вип. 7. – Ч.1. – С. 213 – 225.

9. Мойсєєнко Л. А. Процесуально-динамічний зміст проєктування розв'язку творчих математичних задач // Психологія і суспільство – 2002. – №2. – С. 103 – 113.

10. Айвазов В.А. Психология решения школьниками творческих задач – К.: Радикальная школа, 1983. – 101 с.
11. Мирзлукай-Болтовский Д.Д. Философия. Психология. Математика. – Москва: Серебряные нити, 1998. – 552 с.
12. Поля Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1976. – 336 с.
13. Пономарев Я.А. О понятии “психологический механизм решения творческих задач” // Психологический журнал. – 1996. – Т. 17. – № 6. – С.19–29.
14. Пуанкаре А. Ценность науки // О науке. – М.: Знание, 1990. – 341 с.

Лидия Мойсеевко. Психологические аспекты процесса решения творческих математических задач на доказательство. В статье анализируются результаты исследования поисковых действий при решении творческих математических задач на доказательство. Акцентируется внимание на выявленных особенностях процессов понимания задачи, формирования замысла решения, апробации математических мыслительных результатов, связанных с таким требованием.

Ключевые слова: творческие математические задачи, творческий математический процесс, проблемная ситуация, содержание задачи, структурные единицы задачи, геометрические построения, конкретизация структурных единиц, алгоритм, поток прогнозов, числовые соотношения, поисковая деятельность субъекта.

Lidiya Moiseyenko. Psychological aspects of process of solving creative mathematical problems on demonstration. In the article there have been analyzed the investigation results of searching activity during the process of solving creative mathematical problems that have the demand to demonstrate. The accent has been made on some revealed peculiarities of processes themselves of problem understanding, formation the idea of solving, approbation of cogitative results connected with such demand.

Key words: creative mathematical problems, creative mathematical process, problem situation, problem content, problem structural units, geometric constructions, specification of structural units, algorithm, stream of forecasts, numeric correlations.