

УДК 159.95

М 74

Лідія МОЙСЕЄНКО

### ПСИХОЛОГІЯ РОЗУМІННЯ ТВОРЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ НА РІЗНИХ ЕТАПАХ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТУДЕНТАМИ ТЕХНІЧНОГО ВНЗ

*У статті подаються результати дослідження процесу розуміння творчих математичних задач студентами технічного ВНЗ, з'ясовується специфіка процесу розуміння, що пов'язана із інтелектуальною діяльністю в галузі математики, аналізується зміст розуміння впродовж усього процесу розв'язування: на етапі вивчення умов творчої математичної задачі (оцінка умов), на етапі формування проекту розв'язку, на етапі перевірки проекту. Виділяються відмінності змісту процесу розуміння залежно від етапу розв'язування.*

*Ключові слова:* творчі математичні задачі, процес розуміння, структурні одиниці задачі, потік прогнозів, апробаційні дії.

Численні дослідження творчого мислительного процесу, спрямованого на розв'язування різних задач, не виявили тих орієнтирів, які б однозначно детермінували пошукову діяльність. Проте з'ясовано, що розуміння є тим середовищем, в якому можливо знайти розв'язок творчої задачі.

Значущість вивчення психологією *проблеми феномену розуміння* в пошуковому процесі зумовлюється тим, що його розробка створює підґрунтя для збільшення ефективності багатьох форм діяльності. Не випадково вона привертала і привертає увагу багатьох учених-психологів, серед яких Л.Л. Гурова [3], В.В. Знаков [4], А.Б. Коваленко [5], Ю.К. Корнілов [6], Г.С. Костюк [7], В.О. Моляко [11] і багато інших. Їхні праці, будучи вагомим внеском у розробку основних

теоретичних положень процесу розуміння, спрямовані на з'ясування специфіки цього процесу в ході виконання творчого завдання [3; 5].

Розвиток сучасної психології мислення дає змогу констатувати, що розуміння творчої задачі формується у процесі її розв'язання, і його виникнення не можна відносити лише до однієї певної стадії мислительного процесу [3; 4; 5; 6; 9]. Розуміння як результат мислення є одним із його процесів, що бере участь у забезпеченні успішного розв'язування, спираючись при цьому на пам'ять, сприймання, увагу [3; 5].

Л.Л. Гурова зауважує: "...розуміння – це проходження отримуваної інформації через суб'єктивну сферу смислів, що так чи інакше охоплюють цю інформацію, і конструювання на основі всіх наявних смислових зв'язків концепта, адекватного об'єктивному значенню цієї інформації" [3, 135 – 136].

Досліджень процесу розуміння творчої математичної задачі досить мало зустрічається досить рідко. Серед таких роботи Г.О. Балла [1], Г. Вейля [2], Г.С.Костюка [7], Д.Пойя [12], у яких висвітлюється авторське бачення психологічної сутності процесу розуміння математичної задачі, певні його сторони, механізми, роль у математичній пошуковій діяльності. Однак, не існує *цілісної процесуально-динамічної характеристики розуміння* творчих математичних задач упродовж всього процесу їх розв'язування.

Ми поставили спеціальне *завдання* – експериментально з'ясувати, як проходить процес розуміння творчої математичної задачі під час її розв'язування. Для цього було організовано експериментальне дослідження процесу розв'язування творчих математичних задач студентами інженерно-технічних спеціальностей Івано-Франківського державного технічного університету нафти і газу. *Мета* цього експерименту – проаналізувати перебіг процесу розуміння творчих математичних задач у студентів технічного ВНЗ упродовж їх розв'язування.

Зауважимо, що ми вважали задачу творчою, якщо вона була новою для того, хто її розв'язував. Тому для експерименту задіяли 5 серій математичних задач з різними вимогами: перша (1) – обчислити, друга (2) – довести, третя (3) – побудувати, четверта (4) – дослідити, п'ята (5) – задачі, що не містили сформульованого завдання або були з

надлишковою чи недостатньою інформацією.

Будемо аналізувати процес розуміння впродовж трьох основних етапів розв'язування творчої математичної задачі: 1) вивчення умови задачі; 2) формування проекту майбутнього розв'язку; 3) перевірка гіпотези. Тобто для нас розуміння будь-якої задачі означає розуміння умови (основних структурних елементів, функцій, зв'язків між ними), розуміння того, що є розв'язком, і розуміння того, як досягти цього розв'язку.

Наголосимо на двоякому змісті терміна "розуміння": безпосереднє і опосередковане (вужке і широке значення терміна "розуміння"). У першому випадку мова йде про розуміння об'єктів, що містяться у задачі. Стосовно математичної задачі – це розуміння слів, формул, знаків, символів і т.п. Тобто розуміння набуває форми розуміння-впізнання [4], яке ґрунтується на пам'яті. Якщо ж об'єкт чи ситуація задачі не відомі суб'єкту, то розуміння настає в результаті певної діяльності, певного мислительного процесу.

Читаючи задачу вперше, студент намагається зрозуміти її загальний зміст, щоб зорієнтуватися, що це за задача, чи розв'язував він задачі такого типу, чи впізнає значення слів, символів. Студенти технічного ВНЗ мають багатий досвід розв'язування задач з різних галузей. Тому перше прочитання (без попереднього оголошення розділу, до якого відноситься задача) має для них *орієнтовне* значення, є першим кроком до розуміння запропонованої задачі, навіть якщо це перше уявлення не є чітким і переконливим. Саме на цьому етапі розпочинається розуміння-впізнання. Суб'єкт виділяє із контексту задачі відомі терміни, символи, (пригадуючи їх значення), акцентує увагу на певних числах (що мають певні якісні ознаки):  $\int f(x)dx$  –

інтеграл певної функції;  $\frac{\partial z}{\partial x}$  – частинна похідна, і тощо.

У подальшому студенти відносять математичну задачу до певного класу, тобто визначають, що потрібно зробити (обчислити, довести, побудувати) і що для цього відомо [10]. Дані в основному оцінюються з якісного боку (наприклад, для обчислення площі відома ширина і не відома довжина). майже не акцентується увага на їх кількісній оцінці.

Це особливо яскраво ілюструється при розв'язуванні задач з надлишковою чи недостатньою умовою, коли на початкових стадіях вивчення умови такої "дефект" не виявляється. А у задачах з несформульованим завданням, як правило, відразу виникає запитання: "Що потрібно виконати?"

Розуміння – це розкриття суттєвого в предметах та явищах дійсності, тобто зрозуміти – це означає *віднести* предмет чи явище до певної категорії, дати відповідь на запитання "що це таке?". Аналізуючи умову математичної задачі, студент намагається розчленувати її на прості елементи, що зрозумілі для нього а priori. Відбувається *поділ умови на кілька частин*: виділяються вузлові поняття задачі, процеси. За виявленням вузлових понять асоціативно з'являються основні теоретичні факти, що з ними пов'язані (теореми, формули визначення), тобто відбувається детальніше вивчення частин умови задачі.

Оскільки характерна для розуміння активність виявляється зокрема в постановці запитань, проаналізуємо серію запитань, що виникали у студентів на початку пошукового процесу при розв'язуванні задач з головною вимогою: "складіть подібну задачу". Запитання до кожної задачі, які отримав експериментатор, було розділено на 6 груп: I – про поняття "розв'язати задачу", II – про конкретні структурні елементи, III – про існування залежності між структурними елементами, IV – про зміст залежності між структурними елементами, V – про зміст терміну "подібна задача", VI – про існування розв'язку.

Ми спостерігали, що, вивчаючи текст умови задачі, студенти передовсім намагаються зрозуміти терміни, процеси, про які йдеться. Переважна більшість термінів відомо, тому їх розуміння настає відразу шляхом впізнавання, а увага спрямовується на "нові" терміни. Частота запитань у більшості груп невелика – кожен учасник уточнює свій нюанс. Лише у групі V вона помітно зростає. Поняття "подібна задача" не є зрозумілим для більшості студентів, тому, вивчаючи умову, вони намагаються з'ясувати її зміст. Тобто пошукова діяльність розгортається навколо незрозумілого поняття і є пошуком відомого суб'єкту подібного поняття. Це ілюструє рис. 1.

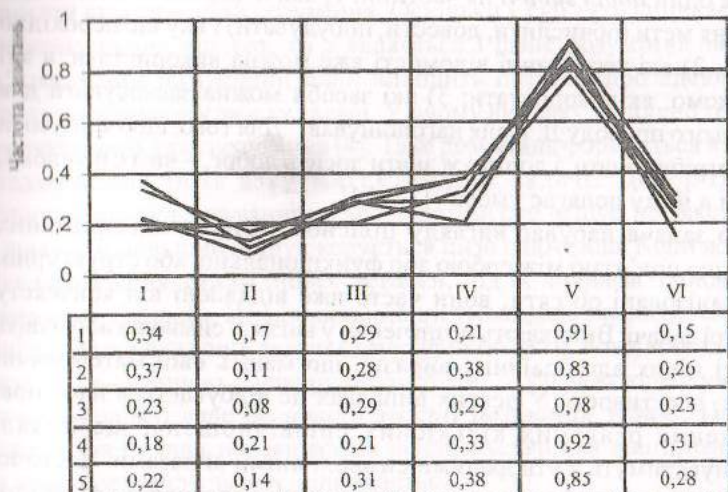


Рис. 1. Частота запитань, які виникали при вивченні умови задачі

Виявивши ряд елементів у задачі, студенти намагаються їх синтезувати в те ціле, яким є творча математична задача, *“по-своєму”* переформулюючи її. Відбувається встановлення взаємозв’язків нового об’єкта з наявними знаннями, вираження його змісту у термінах і поняттях, відомих суб’єкту, що розв’язує задачу, і на цій основі взаємоузгодження семантичного і формального змісту, який містить задача.

“Своє” бачення умови задачі полягає у формалізації тексту задачі на основі введення певних математичних символів; у наданні певної знайомої математичної інтерпретації конкретній ситуації конкретної задачі; у графічній ілюстрації тексту задачі чи текстового опису графічної інформації, що подана в умові.

Отже, якщо спочатку студент з’ясував, чи розв’язував він колись таку задачу, чи ні, до якого розділу знань вона належить, то пізніше він визначав, чи це математична задача на обчислення, чи на доведення

тощо, то тепер, у результаті переведення умови задачі на “свою” мову, настає ще один *поділ задачі* на частини: 1) яка інформація відома для досягнення мети (обчислити, довести, побудувати) і яку ще необхідно отримати; 2) які теоретичні відомості вже можна використати, а які ще не відомо, як використати; 3) які засоби можна застосувати для цього. З цього приводу Д. Пойя наголошував: “Для того, щоб зрозуміти задачу, потрібно знати, і до того ж знати досить добре, – чим є невідоме, що дано і в чому полягає умова” [12, 14].

Тобто задача набуває вигляду цілісної системи математичних об’єктів, що пов’язані між собою або функціонально, або структурно. Це формалізовані об’єкти, вони часто вже віддалені від контексту конкретної задачі. Виникають позначення у вигляді символів або навіть у вигляді цілих алгебраїчних виразів, що мають свої математичні значення, властивості. У деяких випадках це відбувається на основі підключення реальних кількісних співвідношень, що надалі функціонуватимуть з утвореними символічними виразами. Часто на цьому етапі задача одного типу перетворюється в розряд задач іншого типу (наприклад, рівняння четвертої степені стає рівнянням другої степені). Однак задача ще має кілька прогалин, які не дають можливості скласти вичерпну характеристику цієї системи.

Подальший мислительний процес спрямовується на *заповнення виявлених прогалин*, що відбувається за рахунок конкретного використання наявних знань. Цьому сприяють порівняння, встановлення аналогій чи протилежностей, комбінування, про що свідчить аналіз запитань і висловлень.

У результаті описаних дій настає або ні впевненість суб’єкта в розумінні ним умови задачі, ця впевненість може бути як виправданою, так і ні. Така впевненість сприяє подальшій роботі над задачею, а отже, і процесу розуміння. Якщо впевненості у розумінні умови немає, то робота може припинитися.

У процесі формування проекту розв’язку спостерігався процес глибшого усвідомлення і розуміння тексту завдань, і для деякого він наставляв разом із знаходженням розв’язку. Цей процес був не однаково яскравим, не однорідно чітким, все залежало від змісту задачі і того, хто її розв’язував (суб’єктивних факторів).

Смисл математичної задачі визначається *інтерпретацією*

*структурних елементів* через будь-яку гіпотезу, що вимагає від суб'єкта здійснення відповідних мислительних дій. Характер прогнозу, гіпотези визначає стан розуміння. Оскільки у суб'єкта виникає багато альтернативних гіпотез, то з'являється і різне розуміння задачі. У зв'язку з цим на перший план виходить питання про адекватність гіпотези реальному змісту задачі. У цьому випадку доцільно говорити про розуміння-прогнозування [4]. Таке розуміння формується в процесі знаходження розв'язку математичної задачі. Цей розв'язок розпочинається з висунення першої гіпотези про те ціле, про яке йдеться у задачі. Подальший пошук керується цією гіпотезою. Коли вступає в дію визначення змісту інших деталей, під їх впливом здійснюється *перевірка гіпотези*. Не задовільнивши умови, але значно дослідивши і об'єднавши вказані в задачі структурні об'єкти, вона відкидається і замінюється іншою. Перевірка гіпотези, її узгодження з умовою і вимогою задачі веде до *нового змісту розуміння задачі*. Наступна гіпотеза, як і перша, перевіряється змістом задачі, яка наштовхнувшись на невідповідність змісту, відкидається.

Отже, при розумінні творчої математичної задачі суб'єкт спочатку виділяє елементи (числа, символи, операції, геометричні фігури тощо), впізнає їх призначення, а потім знаходить зв'язки між ними як шляхом висунення і перевірки ряду *гіпотез про ці зв'язки* (на етапі вивчення умови), так і шляхом висунення *гіпотез про шляхи розв'язування* (на етапі формування задуму). Гіпотези, що спрямовані на об'єднання розрізаних елементів умови задачі поступово переплітаються в процесі розуміння з гіпотезами щодо змісту розв'язку. Ці *другі* гіпотези сприяють розумінню умови, адже до неї входить (явно чи ні) визначення того, що є розв'язком. Крім того, гіпотези *щодо змісту* розв'язку – це вже гіпотези *щодо задуму*.

Гіпотези визначають спрямованість пошуку, добору інформації та її аналізу. Кожна гіпотеза спрямовує процес розуміння і висвітлює лише кілька сторін ситуації, про яку йдеться у задачі. (Ті, що включені у відповідності до неї). При цьому можуть не враховуватися і суттєві властивості об'єктів, що призводить до хибного розуміння задачі, яке можна подолати висуненням іншої гіпотези.

Математика містить численні алгоритми для розв'язування певних типів задач [8]. Тому серед гіпотез ми часто спостерігали такі, що

сприяли зведенню нової задачі до задачі, вже відомої суб'єкту. Такий напрям не завжди виправданий, адже у процесі розв'язування творчої задачі оригінальніший результат отримують всупереч відомим шляхам пошуку. Розуміння, що базувалося на передбаченні можливості безпосередньо використати ситуацію відомої задачі, часто було неповним, хоч і не завжди.

Отже, на етапі пошуку розв'язку задачі процес розуміння йде паралельно з таким пошуком. Висунені гіпотези щодо розв'язку – це водночас гіпотези процесу розуміння, тому вони висвітлюють певні сторони об'єктів, процесів, які містить творча математична задача. Після такого вивчення різних сторін структурних елементів, розпочинається мислительне *конструювання цілого* з утворених частин – розуміння-об'єднання [4]. *Нове ціле* піддається перевірці умовою. І якщо у суб'єкта виникає враження, що існує відповідність між умовою задачі і знайденим новоутворенням, то воно оголошується розв'язком. Якщо ж ні, то процес повторюється з будь-якої позиції або припиняється.

Невідповідність вибраної ідеї деколи виявляється на етапі складання плану дій з реалізації задуму. Тому усвідомлення неправильного чи неповного розуміння умови задачі, неправильного розуміння розв'язку часто настає аж на цьому – *пізнішому* – етапі розв'язування.

Якщо задум вдається реалізувати, суб'єкт отримує розв'язок (проміжний чи кінцевий). Далі мислительна діяльність спрямовується на перевірку знайденого розв'язку. Але коли перевірка виявляє, що гіпотеза не привела до правильного розв'язку, то висувається інша гіпотеза. Повторюючись, мислительний процес повертається до одного з розглянутих етапів і знову продовжується в тій самій послідовності, лише із врахуванням нових – виявлених і незауважених спершу – нюансів умови задачі, тобто на іншому рівні.

Це дає нам право стверджувати, що процес розуміння творчої математичної задачі, як і процес формування проекту, йде по спіралі, кожен виток якої має свій радіус, залежний від того місця схеми, куди в думках повертається суб'єкт після перевірки умовою задачі знайденого "розв'язку".

Недостатність розуміння, його інтуїтивність, пропущені для усвідомлення ланки виявляються на етапі *пояснення* розв'язку –



розуміння-пояснення [4]. Словесне чи символічне пояснення є необхідним компонентом розуміння, а також одним із його індикаторів. Часто студент, знайшовши розв'язок і пояснюючи його експериментатору, відмовляється від нього, усвідомлюючи його невідповідність. В основному пояснення свідчать про повноту і глибину розуміння задачі, її розв'язку.

Отже, можна стверджувати, що процес розуміння творчої математичної задачі у студентів проходить упродовж всіх етапів розв'язування задач, за допомогою процедур визнавання старого у новому, прогнозування майбутнього чи минулого щодо об'єкта, який розуміється, об'єднання розрізаних елементів у ціле, пояснення знайденого розв'язку. Причому різні процедури мають домінуючий характер на різних етапах пошукового процесу.

Відмінності сутності процесу розуміння творчих математичних задач не обмежуються тими, що пов'язані з етапом пошукового процесу. Цікавим є зміст відмінностей процесу розуміння математичних задач різних типів, видів. Це і суб'єктивні відмінності, що базуються на різних індивідуальних ознаках мислительного процесу, і питання, пов'язані з активізацією та оптимізацією процесу розуміння творчих математичних задач. Зазначені проблеми потребують свого вирішення.

1. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
2. Вейль Г. Математическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
3. Гурова Л.Л. Интуиция и логика в психологической структуре решения задач / Семантика, логика, интуиция в мыслительной деятельности человека – М.: Педагогика, 1979. – С. 8 – 45.
4. Знаков В.В. Понимание в познании и общении. – М.: Изд-во РАН Института психологии, 1994. – 237 с.
5. Коваленко А.Б. Психологія розуміння творчих задач. – К.: Либідь, 1994. – 116 с.
6. Корнилов Ю.К. Психологические проблемы понимания. – Ярославль: Изд-во Ярослав. ун-та, 1979. – 80 с.
7. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психологічний розвиток особистості. – К.: Радянська школа, 1989. – 108 с.
8. Мойсесенко Л.А. Математичне мислення як предмет психологічних досліджень // Збірник наукових праць: філософія, соціологія, психологія. – Івано-Франківськ: Плай, 2002. – Вип. 7. – Ч.1. – С. 213 – 225.
9. Мойсесенко Л.А. Про психологію розуміння творчих математичних задач // Вісник Прикарпатського університету. Філософські і психологічні науки. – Івано-

Франківськ: Плай, 2002. – Вип. III. – С. 174 – 180.

10. Мойсеєнко Л.А. Психологія розуміння творчих математичних задач різних класів // Актуальні проблеми загальної психології. Збірник наукових праць Інституту психології ім. Г.С.Костюка АПН України. – 2001. – Т.3. – Ч.8. – С. 170 – 179.

11. Моляко В.А. Психология конструкторской деятельности. — М.: Машиностроение, 1983. — 136 с.

12. Пойя Д. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207с.

**Лидия Мойсеенко. Психология понимания творческих математических задач студентами технического вуза на разных этапах решения.** В статье подаются результаты исследования процесса понимания творческих математических задач студентами технического вуза. Выясняется специфика процесса понимания, которая связана с интеллектуальной деятельностью в области математики. Анализируется содержание понимания на протяжении всего процесса решения: на этапе изучения условия творческой математической задачи (оценка условия), на этапе формирования проекта решения, на этапе проверки проекта. Выделяются отличительные черты процесса понимания в зависимости от этапа решения.

**Ключевые слова:** творческие математические задачи, процесс понимания, структурные единицы задачи, поток прогнозов, апробационные действия.

**Lidiya Moiseyenko. Psychology of understanding creative mathematical problems by students of technical higher educational establishments at different stages of their solution.** In the article there have been given the investigation results of the process of understanding creative mathematical problems by the students of technical higher educational establishment. It has been clarified the specific character of understanding that is connected with the intellectual activity in mathematics. It has been analyzed the content of understanding during the whole solution process: at the stage of study of creative problem situation (situation estimation), formation of project solution, check of the project. There has been emphasized a different content of a comprehension process depending on a solution stage.

**Keywords:** creative mathematical problems, process of understanding, problem structural units, stream of forecasts, controlling actions.